Die Parabeliteration

am Beispiel „Windpocken im Kindergarten“

In einem Kindergarten sind die Windpocken ausgebrochen – eine bekanntermaßen höchst ansteckende Kinderkrankheit. Ziel ist es ein mathematisches Modell für den Verlauf dieser Krankheit zu entwickeln. Wir führen folgende Bezeichnungen[1] ein:

P :	Gesamtanzahl der Kinder im Kindergarten (Population),
t_ν :	Zeitpunkt (hier: der ν-te Tag nach Ausbruch der Epidemie),
$K_\nu := K(t_\nu)$:	Anzahl der erkrankten Kinder zum Zeitpunkt t_ν,
$k_\nu := \frac{K_\nu}{P}$:	relativer Anteil, der zum Zeitpunkt t_ν erkrankten Kinder,
α :	Infektionsrate.

In den ersten Tagen nach Ausbruch der Epidemie stellt die Kindergartenleiterin fest, dass die Zahl der erkrankten Kinder von einem Tag zum nächsten ziemlich proportional anwächst, d.h. es gilt eine Rekursion der Gestalt

$$k_{\nu+1} = \alpha \cdot k_\nu \text{ mit } \alpha > 1.$$

Verfolgt man diese Iteration rückwärts so ergibt sich:

$$k_{\nu+1} = \alpha \cdot k_\nu = \alpha^2 \cdot k_{\nu-1} = \cdots = \alpha^{\nu+1} \cdot k_0 .$$

Wegen $k_0 > 0$ und $\alpha > 1$ ist die Folge (k_ν) streng monoton steigend und unbeschränkt. Daraus folgt, dass die Werte k_ν ab einem Index auch größer als 1 werden, im Widerspruch zu ihrer Definition als relative Anteile. Neben diesem mathematischen Widerspruch erkennt auch die Kindergärtnerin „experimentell“, dass der Krankheitsverlauf nur in den ersten Tagen durch die Rekursion $k_{\nu+1} = \alpha \cdot k_\nu$ gut wiedergegeben wird. Nach einigen Tagen sinkt die Zahl der Neuerkrankungen und geht schließlich gegen Null.

Man versucht deshalb, das offensichtlich zu einfache Modell der Realität besser anzupassen. Es scheint vernünftig zu sein, den Anteil der Infizierten auch proportional zum Anteil $1-k_\nu$ der Gesunden anzusetzen. Denn nur solange gesunde Kinder vorhanden sind, können sich Neuerkrankungen ergeben, und deren Anzahl wird umso höher sein, je mehr Gesunde vorhanden sind. Insgesamt hat man dann eine nichtlineare Rekursion

$$k_{\nu+1} = \alpha \cdot k_\nu \cdot (1-k_\nu) \text{ mit } \alpha > 1.$$

Wir führen die Funktionen $\varphi_\alpha(x) = \alpha \cdot x$ und $\psi_\alpha(x) = \alpha \cdot x \cdot (1-x)$ mit $\alpha > 1$ ein, um die Iterationen analytisch und graphisch studieren zu können. In diesen Fällen gilt:

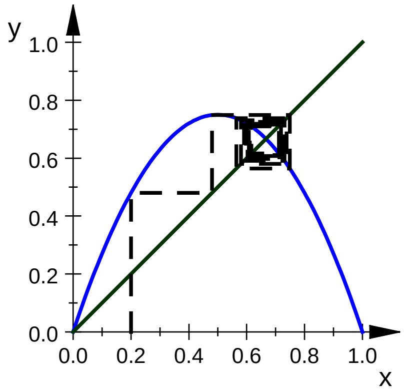
$$k_{\nu+1} = \varphi_\alpha(k_\nu) \quad \text{bzw.} \quad k_{\nu+1} = \psi_\alpha(k_\nu).$$

Untersuchen Sie mit Hilfe von ***MuPAD***: Wie wirkt sich die Infektionsrate α auf die Neuerkrankungen aus?

---

[1] Wir verwenden folgende griechische Buchstaben: α (Alpha), φ (Phi), ν (Nü) und ψ (Psi).

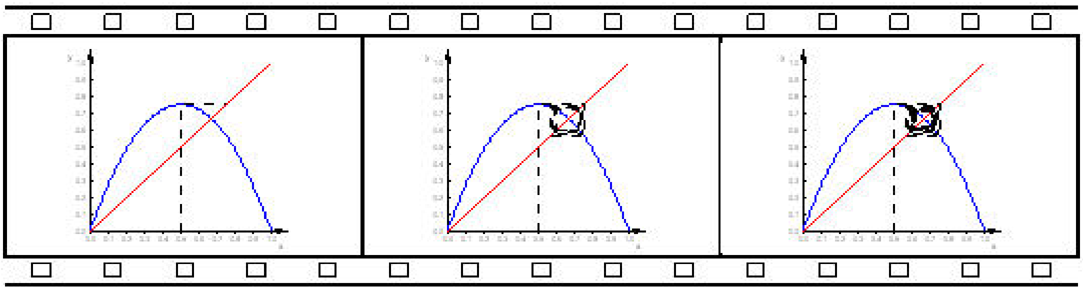
```
f := plot::Function2d(3*x*(1 - x), x = 0..1, Color = RGB::Blue):
x0 := 0.2:
g := plot::Function2d(x, x = 0..1, Color = RGB::Red):
it := plot::Iteration(3*x*(1 - x), x0, 20, x = 0..1):
plot(f, g, it, LineWidth=0.5)
```



Zunächst wird die Iterationsfunktion `f` mit dem Parameter 3 (in unserem Text ψ_3) eingegeben. Der Wert `x0` ist der Startwert der Iteration. Der Graph von `g` ist die Winkelhalbierende des 1. Quadranten. Der Befehl `plot::Iteration` zeichnet den Verlauf der Iteration (mit der Zahl nach `x0` (hier `20`) kann man die Anzahl der Iterationen beeinflussen). Ersetzt man die vierte Zeile durch

```
it := plot::Iteration(3*x*(1 - x),
x0, n, x = 0..1, n = 1..50):
```

so erhält man eine Animation der Iteration.



Mit den folgenden Befehlen animieren wir den Parameter `a`. Probieren Sie es aus!

```
f := plot::Function2d(a*x*(1 - x), x = 0..1, a = 2..4):
g := plot::Function2d(x, x = 0..1):
it1 := plot::Iteration(a*x*(1 - x), 0.2, 30, x = 0..1, a = 2..4):
plot(f, g, it1)
```

Aufgabe:

Wenden Sie die ***MuPAD***-Befehle auch auf die letzten Beispiele des Unterrichts an:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}}_{n\ \text{Wurzeln}} = 2$ mit $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}\,,\ x_0 = \sqrt{2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}_{n\ \text{Brüche}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.6180$ mit $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}\,,\ x_0 = 1$