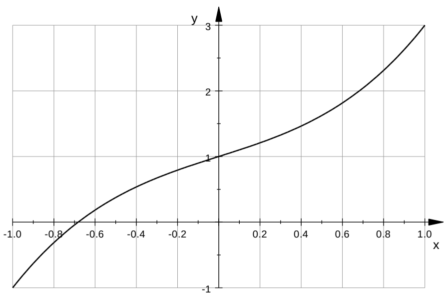
Wie Sir Isaac Newton nicht-lineare Gleichungen löst – Das Newton-Verfahren

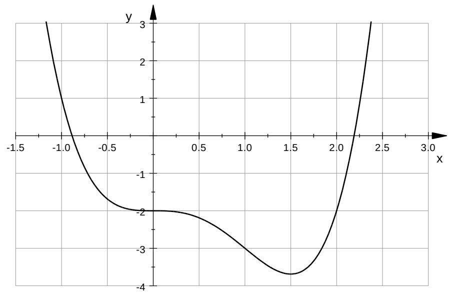
Viele Aufgaben des Analysisunterrichts, zum Beispiel die Berechnung von Nullstellen, lokalen Extrema und Wendepunkten führen auf eine genaue (oft ganzzahlige oder rationale) Lösung. In der Praxis ist diese Situation allerdings untypisch. An Stelle einer exakten Lösung suchen wir dann eine Näherungslösung, die einer geforderten Genauigkeit genügt.

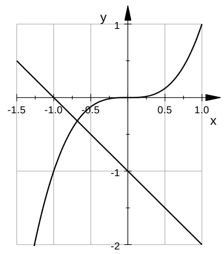
Beispiele

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 + x + 1$. Wir wissen, dass f eine Nullstelle haben muss, weil f ein Polynom vom Grad 3 ist. Wegen $f(0) = 1 > 0$ und $f(-1) = -1 < 0$ muss die Nullstelle im Intervall $[-1{,}1]$ liegen. Aus $f'(x) = 3 \cdot x^2 + 1 > 0$ folgt, dass f streng monoton steigend ist, also hat f genau eine Nullstelle.
2. Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = x^4 - 2 \cdot x^3 - 2$. Ein Polynom vom Grad 4 kann maximal vier Nullstellen haben. Aus $g(0) = -2 < 0$ und $g(3) = 25 > 0$ folgt, dass g eine Nullstelle im Intervall [0,3] hat. Weil $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ ist, muss g mindestens eine weitere Nullstelle haben. Aus $g(-1) = 1 > 0$ folgt, dass g eine Nullstelle im Intervall $[-1{,}0]$ haben muss. Wir betrachten die Ableitungen $g'(x) = 4 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2$ und $g''(x) = 12 \cdot x^2 - 12 \cdot x$. Die Funktion g hat nur ein Extremum und somit genau zwei Nullstellen.

In den beiden Beispielen ist es uns nicht möglich die Gleichungen $f(x) = 0$ bzw. $g(x) = 0$ exakt zu lösen. Durch eine Grafik erhalten wir eine erste Näherung für die Nullstellen.







Die dritte Grafik entsteht aus folgender Überlegung: $x^3 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -x - 1$. Wenn sich die kubische und die lineare Funktion schneiden, hat f eine Nullstelle.

Bisher haben wir uns überlegt, ob eine Funktion eine oder mehrere Nullstellen besitzt. Kommen wir jetzt zur Frage der Berechnung der Nullstellen. Newtons Überlegung war die folgende: Wenn ich die Gleichung $f(x) = 0$ nicht lösen kann, ersetze ich f durch eine einfache Funktion t und löse die Gleichung $t(x) = 0$. Als t wählte Newton die Tangente an f in einem Punkt $P(x_0|f(x_0))$ also eine lineare Funktion, weil sie auf jeden Fall eine Lösung besitzt. Die Tangente hat die Darstellung $t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Wir bezeichnen die Nullstelle von t mit x_1, dann gilt $t(x_1) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

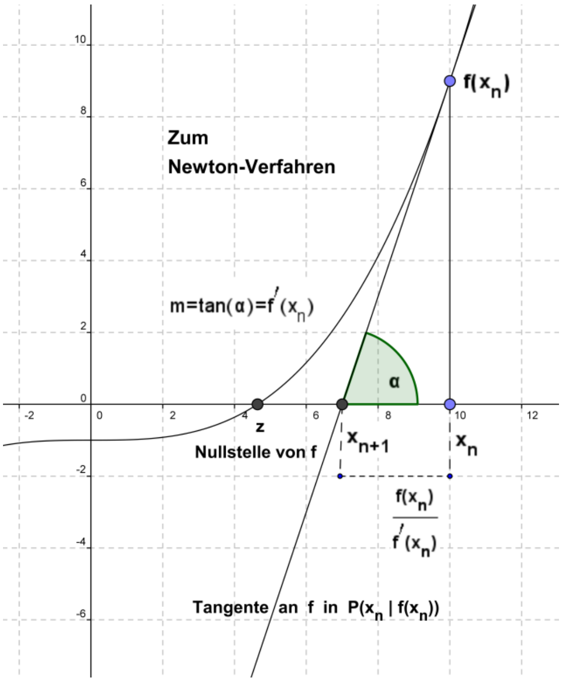
Wenn wir ausgehend von x_1 einen neue n Wert x_2 berechnen, usw. erhalten wir ein Iterationsverfahren, das nach Newton benannte Verfahren. Im folgenden Satz geben wir hinreichende Bedingungen an, die zur Lösung führen.

Satz (Newton-Verfahren)

Die Funktion f sei im Intervall $[a, b]$ zweimal differenzierbar. Es sei $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, ferner sei $f'(x) > 0$ und $f''(x) \neq 0$. Dann hat f in $[a, b]$ genau eine Nullstelle z und die Folge (x_n) mit $x_0 = b$ und

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

konvergiert gegen z für $n \to \infty$.



In dem nebenstehenden Bild können Sie erkennen, dass ausgehend von x_n der folgende Iterationswert x_{n+1} eine bessere Näherung an die Nullstelle liefert, d.h. $|x_{n+1} - z| < |x_n - z|$.

Ohne Beweis geben wir an, dass folgende Fehlerabschätzung gilt:

$$|x_{n+1} - z| \leq c_f \cdot |x_n - z|^2.$$

Wie sagen das Newton-Verfahren ist quadratisch konvergent (im Gegensatz zum Banachschen Fixpunktsatz, der ein linear konvergentes Verfahren liefert). In der Praxis bedeutet das, dass das Newton-Verfahren besonders schnell konvergiert, in jedem Iterationsschritt verdoppelt sich die Anzahl richtiger Dezimalstellen (mindestens).

Wir berechnen jetzt die Newton-Folge für das erste Beispiel $f(x) = x^3 + x + 1 = 0$.

Die Iterationsfolge ist

$$x_{n+1} = x_n - \frac{{x_n}^3 + x_n + 1}{3 \cdot {x_n}^2 + 1}, \quad x_0 = 0.$$

(Die Wahl des Startwertes kann man aus der dritten Grafik ablesen: Die Funktionen x^3 und $-x - 1$ schneiden sich im Intervall $[-1,0]$. Statt 0 hätte man auch jeden Wert aus diesem Intervall nehmen können.)

Mit dem TR erhalten wir folgende Werte (gerundet auf acht Stellen). Unterstrichen sind die richtig berechneten Dezimalstellen, d.h. bei x_3 sind zwei Stellen richtig, bei x_4 vier Stellen, bei x_5 acht Stellen u.s.w.

$$x_0 = 0,\ x_1 = -1,\ x_2 = -0.75,\ x_3 = -0.\underline{68}6046512,\ x_4 = -0.\underline{6823}39583,\ x_5 = -0.\underline{682327804}.$$

Befehl in MuPAD lautet zum Beispiel (Mit der Option `AllRealRoots` berechnen wir nur reelle Nullstellen):

- `numeric::solve(x^3+x+1=0, x, AllRealRoots)`
  {-0.682327803828031}

- ```
  f := x -> x^4-2*x^3-2:
  numeric::solve(f(x)=0, x, AllRealRoots)
  ```
  {-0.885033503648543, 2.19032794671483}

Übungen / Aufgaben

1. Berechnen Sie alle Nullstellen von $f(x) = 0$ mit $f(x) = e^x + x - 1$ bzw. $f(x) = x^4 - 2 \cdot x^3 - 2$.
2. Gegeben ist $f_a(x) = a \cdot x^3 - x^2 + 2 \cdot x - a$. Welchen Wert hat a, wenn das Newton-Verfahren ausgehend vom Startwert $x_0 = 1$ den nächsten Iterationswert $x_1 = {}^2/_3$ liefert?
3. Leiten Sie eine Formel zur Berechnung von $\sqrt{2}$ her („Heron-Verfahren"), indem Sie das Newton-Verfahren auf eine geeignete Funktion anwenden.
4. Formulieren Sie für das Newton-Verfahren einen Algorithmus in MuPAD und wenden Sie ihn auf die Funktionen in Aufgabe 1 an.
  ```