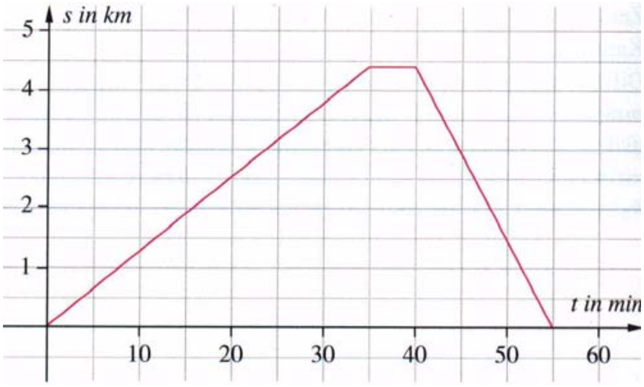
–

1. Mittlere Änderungsrate

Zwischen Garmisch-Partenkirchen und dem Gipfel der Zugspitze verkehrt seit 1931 eine Zahnradbahn. Die letzten 4,4 km zwischen Riffelriß und dem Schneefernerhaus auf der Zugspitze verläuft die Strecke durch einen Tunnel. Das nebenstehende Bild zeigt einen grafischen Fahrplan der Zugspitzbahn für die Tunnelstrecke.



a) Wo befindet sich die Bahn laut Fahrplan nach 37min?

b) Welche Bedeutung hat der waagerechte Teil des Graphen?

c) Welche Bedeutung hat der Teil des Graphen mit negativer Steigung?

d) Mit welcher Geschwindigkeit fährt die Bahn auf den dargestellten Abschnitten?

e) Inwieweit beschreibt der grafische Fahrplan die Fahrt des Zuges nur ungenau?

2. Mittlere und momentane Geschwindigkeit

a) Aus einem Gespräch: „Neulich bin ich mit dem Auto von Bielefeld nach Berlin gefahren, für die 400 km habe ich genau 4 Stunden benötigt.“ – „Dann warst Du aber mit 100 km/h nicht besonders schnell.“ – „Wie man´s nimmt, manchmal bin ich über 150 km/h gefahren.“ Wie kommt das Missverständnis zustande?

b) Wir betrachten einen Anfahrvorgang eines PKW und unterstellen (was nicht unrealistisch ist) einen quadratischen Weg-Zeit-Zusammenhang, also $s(t) = t^2$.

1. Berechnen Sie die Wegstrecken in Zeitabschnitten von je einer Sekunde.
2. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit im Intervall von $t_0 = 1$ bis $t_1 = 3$.
3. Wie lässt sich die Momentangeschwindigkeit im Zeitpunkt $t_0 = 1$ berechnen?

3. Definition und mathematische Fachsprache

Eine reelle Funktion f heißt in x_0 differenzierbar, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert. In diesem Fall bezeichnet man ihn mit $f'(x_0)$ oder mit $\frac{df}{dx}(x_0)$. Wir nennen den Grenzwert die Ableitung (oder den Differentialquotient) von f an der Stelle x_0.

Den Quotienten $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ bezeichnet man als Differenzenquotient von f.

Zur geometrischen Bedeutung: Der Differenzenquotient ist die Steigung der Sekante an f durch die Punkte $P(x \,|\, f(x))$ und $Q(x_0, f(x_0))$, der Differentialquotient ist die Steigung der Tangente an f im Punkt Q.

4. Die nachfolgende **Übersicht** beschreibt den Weg zur Ableitung:

$f(x_0)$	$f(x)-f(x_0)$	$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
der zurückgelegte Weg zum Zeitpunkt x_0	der in der Zeit von x_0 bis x zurückgelegte Weg (absoluter Zuwachs)	der in der Zeit von x_0 bis x zurückgelegte Weg bezogen auf die dafür benötigte Zeitspanne $x-x_0$ (relativer Zuwachs)	die momentane Geschwindigkeit zum Zeitpunkt x_0
Funktionswert	Differenz der Funktionswerte	Differenzenquotient	Differentialquotient / Ableitung
		algebraisch	**analytisch**

5. Berechnen Sie die **Ableitungen** folgender Funktionen:

a) $f(x)=x^2$ b) $f(x)=x^n,\quad n\in\mathbb{N}$ c) $f(x)=\frac{1}{x},\quad x\neq 0$

d) $f(x)=\sqrt{x},\quad x\geq 0$ e) $f(x)=|\,x\,|$ f) $f(x)=\sin(x)$

```
• f:= x -> sin(x):
  dQ(x):=(f(x)-f(x0))/(x-x0)
```

$$\frac{\sin(x)-\sin(x0)}{x-x0}$$

```
• limit(dQ(x), x=x0)
```

$\cos(x0)$

```
• sin'
```

cos

```
• sin'(x)
```

$\cos(x)$

```
• diff(sin(x),x)
```

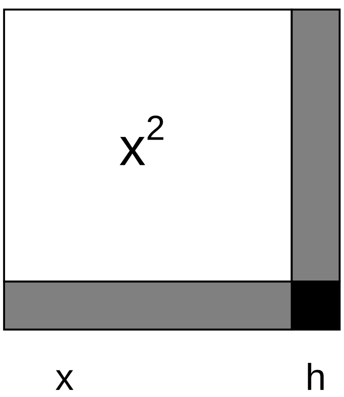
$\cos(x)$

In ***MuPAD*** kann man auf verschiedene Arten differenzieren. Erläutern Sie mit Hilfe der Produkt-Summenformel, wieso der Kosinus die Ableitung des Sinus ist.

Hinweis
Unter der Produkt-Summenformel versteht man die folgende Beziehung.

$$\sin(x)-\sin(x_0)=2\cdot\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right).$$

6. Geometrische Deutung



Die absolute Änderung des Flächeninhalts eines Quadrates ist für kleine h im Wesentlichen gleich dem Inhalt der beiden grauen Rechtecke, die relative Änderung daher im Wesentlichen gleich dem halben Umfang:

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\approx 2\cdot x\,.$$